第41講　総合問題(1)

1 ［1］ 自然数 n で，$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n となるものは全部でいくつあるか．

［2］ 実数 a，x，y，z が

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ．

(2) x，y，z のうち少なくとも2つが等しいとき，a，x，y，z を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］ (1) $0 \leqq x \leqq 3$，$0 \leqq y \leqq 3$ のとき，x，y の関数 $P=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ．

(2) x，y の関数 $Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ．

［2］ 2 次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この方程式が実数解をもつとき，少なくとも 1 つの解は 0 以上になることを示せ．

(2) この方程式が $0 \leqq x < \dfrac{2}{3}$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1)　0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\frac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2)　(1)で求めた x を x_k とおく．$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　総合問題(1)

［1］ $x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15$（x，y は実数）は，$x=-$ ア ，$y=$ イ のとき最小値 ウ をとる．

［2］ p を実数とし，方程式 $x^3-px^2-\frac{13}{4}x+\frac{15}{8}=0$ は 3 つの実数解 a，b，c（$a>b>c$）をもつとする．$a+c=2b$ を満たすとき，$a=\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$，$b=\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$，$c=-\frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$，$p=\frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第41講　総合問題(1)

1 [1]　自然数 n で，$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n となるものは全部でいくつあるか．

$\sqrt{n^2-n+20}$ の整数部分が n より

$n \leqq \sqrt{n^2-n+20} < n+1$

$n^2 \leqq n^2-n+20 < (n+1)^2$

$n^2 \leqq n^2-n+20$　より　$n \leqq 20$

$n^2-n+20 < (n+1)^2$　より　$n^2-n+20 < n^2+2n+1$　　$\dfrac{19}{3} < n$

よって　$\dfrac{19}{3} < n \leqq 20$ より　$7 \leqq n \leqq 20$

したがって求める n の個数は　$20-7+1=$**14（個）**

1 [2]　実数 a，x，y，z が

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1)　$xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ．

(2)　x，y，z のうち少なくとも2つが等しいとき，a，x，y，z を求めよ．

(1)　$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$　より

$$\boldsymbol{xy+yz+zx}=\frac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{a^2-(a^2-2a+14)\}=\boldsymbol{a-7}$$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$　より

$3xyz=(a^3-3a^2+3a+18)-a\cdot\{(a^2-2a+14)-(a-7)\}=-18a+18$

よって　$\boldsymbol{xyz=-6a+6}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$x+y+z=a$，$xy+yz+zx=a-7$，$xyz=-6a+6$　より

x，y，z は t の3次方程式

$$t^3-at^2+(a-7)t+6a-6=0$$

の3解.

$$(t+2)(t-3)(t-a+1)=0$$

$$t=-2,\ 3,\ a-1$$

この3解のうち，少なくとも2つが等しい

よって　$a-1=-2$　または　$a-1=3$

つまり　$a=-1,\ 4$

$a=-1$ のとき，3つの解は $\{-2,\ -2,\ 3\}$

$a=4$ のとき，3つの解は $\{-2,\ 3,\ 3\}$

ゆえに

$(a,\ x,\ y,\ z)=$ **$(-1,\ -2,\ -2,\ 3)$，$(-1,\ -2,\ 3,\ -2)$，$(-1,\ 3,\ -2,\ -2)$，$(4,\ 3,\ 3,\ -2)$，$(4,\ 3,\ -2,\ 3)$，$(4,\ -2,\ 3,\ 3)$**

---

2 [1]　(1)　$0\leqq x\leqq 3$，$0\leqq y\leqq 3$ のとき，x，y の関数 $P=x^2+3y^2+4x-6y+2$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ.

(2)　x，y の関数 $Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$ の最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を示せ.

---

(1)　$P=x^2+3y^2+4x-6y+2=(x+2)^2+3(y-1)^2-5$

$0\leqq x\leqq 3$，$0\leqq y\leqq 3$　より

$x=3$，$y=3$ のとき　最大値 32　　$x=0$，$y=1$ のとき　最小値 -1

(2)　$Q=x^2-6xy+10y^2-2x+2y+2$

$=x^2-2(3y+1)x+10y^2+2y+2$

$=(x-3y-1)^2-(-3y-1)^2+10y^2+2y+2$

$=(x-3y-1)^2+y^2-4y+1$

$=(x-3y-1)^2+(y-2)^2-3$

よって　$x=3y+1$ かつ $y=2$　つまり　**$x=7$，$y=2$ のとき　最小値 -3**

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[2]［2］ 2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この方程式が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になることを示せ．

(2) この方程式が $0 \leqq x < \frac{2}{3}$ の範囲に少なくとも1つの実数解をもつように，定数 a の値の範囲を定めよ．

(1) 2次方程式 $2x^2-2ax+a=0$ ……① の判別式を D とすると，

①が実数解をもつのは $D \geqq 0$ のとき

$\frac{D}{4}=a^2-2a=a(a-2) \geqq 0$ より $a \leqq 0,\ 2 \leqq a$

$f(x)=2x^2-2ax+a=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}+a$ とおく．

$a \leqq 0$ のとき $f(0)=a \leqq 0$ よって①の2解のうち大きい方の解は0以上

$a \geqq 2$ のとき $f(x)$ の軸 $x=\frac{a}{2} \geqq 1 > 0$ よって①の2解のうち大きい方の解は0以上

以上より，①が実数解をもつとき，少なくとも1つの解は0以上になる．

(2) (1)より，$a \leqq 0,\ 2 \leqq a$ のとき，①の2解のうち少なくとも1つの解は0以上である．

$a \leqq 0$ のとき $f(0) \leqq 0$

よって $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{a}{3}>0$ つまり $a<\frac{8}{3}$ であればよい．

$a \leqq 0$ より $a \leqq 0$

$a \geqq 2$ のとき $f(x)$ の軸 $x=\frac{a}{2} \geqq 1$　　$f(0)=a>0$

よって $f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{9}-\frac{a}{3}<0$ つまり $a>\frac{8}{3}$ であればよい．

これは $a \geqq 2$ を満たす．

以上より，$\boldsymbol{a \leqq 0,\ \frac{8}{3}<a}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 0以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ を満たす x を k を用いて表せ．

(2) (1)で求めた x を x_k とおく．$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ．

(1) $f(x)=\log_2(x+1)$ より

$$\frac{k}{2}(f(1)-f(0))=\frac{k}{2}(\log_2 2-\log_2 1)=\frac{k}{2}$$

よって $f(x)=\dfrac{k}{2}(f(1)-f(0))$ より $\log_2(x+1)=\dfrac{k}{2}$ $(k\geqq 0)$

$$x+1=2^{\frac{k}{2}}$$

したがって $\boldsymbol{x=2^{\frac{k}{2}}-1}$

(2) (1)より $x_k=2^{\frac{k}{2}}-1=(\sqrt{2})^k-1$

$$\begin{aligned}
S_n&=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})\\
&=1\cdot(x_1-x_0)+2\cdot(x_2-x_1)+3\cdot(x_3-x_2)+\cdots\cdots+(n-1)\cdot(x_{n-1}-x_{n-2})+n\cdot(x_n-x_{n-1})\\
&=-x_0+(1-2)x_1+(2-3)x_2+\cdots\cdots+\{(n-1)-n\}x_{n-1}+nx_n\\
&=-(x_0+x_1+x_2+\cdots\cdots+x_{n-1})+nx_n\\
&=-\sum_{k=0}^{n-1}\{(\sqrt{2})^k-1\}+nx_n\\
&=-\frac{1\cdot\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}+n+n\{(\sqrt{2})^n-1\}\\
&=-\frac{\{(\sqrt{2})^n-1\}(\sqrt{2}+1)}{2-1}+n(\sqrt{2})^n\\
&=-(\sqrt{2})^n(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}+1)+n(\sqrt{2})^n=\boldsymbol{(n-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n+\sqrt{2}+1}
\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第41講　総合問題(1)

[1]　$x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15$ (x, y は実数) は，$x=-$ **ア** ，$y=$ **イ** のとき最小値 **ウ** をとる．

[2]　p を実数とし，方程式 $x^3-px^2-\frac{13}{4}x+\frac{15}{8}=0$ は3つの実数解 a, b, c $(a>b>c)$ をもつとする．$a+c=2b$ を満たすとき，$a=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$，$b=\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，$c=-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$，$p=\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である．

解答例

[1]　$x^2-4xy+5y^2+6x-14y+15=x^2-2(2y-3)x+5y^2-14y+15$

$$=(x-2y+3)^2+y^2-2y+6$$

$$=(x-2y+3)^2+(y-1)^2+5$$

よって　$x=2y-3$ かつ $y=1$　　つまり　$x=\mathbf{-1}$, $y=\mathbf{1}$ のとき，最小値 $\mathbf{5}$ をとる．

[2]　解と係数の関係より

$$a+b+c=p \quad \cdots\cdots①,\quad ab+bc+ca=-\frac{13}{4} \quad \cdots\cdots②,\quad abc=-\frac{15}{8} \quad \cdots\cdots③$$

条件より　$a+c=2b$　……④

②より　$b(a+c)+ca=-\frac{13}{4}$　これに④を代入して　$2b^2+ca=-\frac{13}{4}$

$ca=-2b^2-\frac{13}{4}$　……⑤　　これを③に代入して

$\left(-2b^2-\frac{13}{4}\right)b=-\frac{15}{8}$　　$16b^3+26b-15=0$

$(2b-1)(8b^2+4b+15)=0$　　$8b^2+4b+15=8\left(b+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{29}{2}>0$ より　$b=\frac{1}{2}$

このとき④より　$a+c=1$　　③より　$ac=-\frac{15}{4}$

これらより a, c は2次方程式 $t^2-t-\frac{15}{4}=0$ の2解.

$4t^2-4t-15=0$　　$(2t+3)(2t-5)=0$　　$t=-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$

$a>b>c$ より　$a=\mathbf{\frac{5}{2}}$, $b=\mathbf{\frac{1}{2}}$, $c=-\mathbf{\frac{3}{2}}$　　また①と④より　$p=3b=\mathbf{\frac{3}{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。